LE POLIZZE INDEX - LINKED: VALUTAZIONI E CONFRONTI. LIFE INSURANCE INDEX-LINKED:EVALUATIONS AND COMPARISONS

MONICA BALDINI

Abstract. This paper discusses the commonly used analytical and numerical methods of option theory applied to valuation Index Linked Insurance. The paper is divided in four parts: in the first we describe the principal payoffs of some type of Index Linked contracts in the market of Italian insurance; in the second part we explain the analytical solution in literature, in the third we study a numerical evaluation method; lastly we study a numerical experiment using Monte Carlo simulation when the underlying index of the contract has a stochastic volatility, comparing, then, the results with the analitical solutions.

Sunto[1]

Questo lavoro discute i modelli analitici e numerici classici della option theory, con riferimento alla valutazione dei premi e delle riserve matematiche delle moderne forme assicurative Index-Linked Guaranteed.

Lo studio si divide in quattro parti: nella prima parte si descrivono le principali caratteristiche tecniche di queste forme assicurative; nella seconda si descrivono i modelli attuariali che vengono usati per valutarle; nella terza parte si descrive il metodo numerico usato per la valutazione ed, infine, nell'ultima parte viene descritta un'applicazione ed un'analisi comparata dei risultati rinvenuti dai diversi modelli esaminati ed il confronto con il metodo numerico proposto con volatilità stocastica e, quindi, nelle conclusioni, discusse le implicazioni sulla gestione della compagnia di assicurazione.

1. Introduzione.

Le polizze Index - Linked sono assicurazioni sulla vita, generalmente di tipo misto, il cui rendimento è agganciato ad uno o più indici di borsa, con rendimento minimo garantito. Pertanto, il payoff della garanzia alla scadenza, può essere espresso nel seguente modo:

$$G_T = D \max\left\{\eta(1 + f(I_0, I_t, t)); (1 + i)^T\right\} \tag{1}$$

Date: 20 Luglio 2001.

Key words and phrases. Option pricing, volatilità stocastica, Monte Carlo simulation, assicurazioni miste.

[1]Questo articolo è tratto dalla tesi di dottorato in "Matematica per le applicazioni economico-finanziarie" dal titolo: "Sui modelli attuariali per la valutazione di forme assicurative Index-Linked: analisi e confronti", presso il Dipartimento di Matematica per la decisioni finanziarie, economiche e assicurative, Università di Roma "La Sapienza".

dove:
D : premio unico o capitale investito, al netto delle spese;
η: aliquota di retrocessione (0,70$\leq$ $\eta \leq$ 0,95);
$f(I_0, I_t, t)$: funzione dell'indice (o paniere di indici) iniziale, I_0, dell'indice osservato nel generico istante I_t, e del tempo t. Tale funzione assume diverse forme, a seconda della garanzia offerta alla scadenza. Nel più semplice dei casi si ha:

$$G_T = D \max\left\{\frac{I_T}{I_0}; (1+i)^T\right\} \tag{2}$$

I_0 : valore corrente dell'indice;
I_T : valore dell'indice alla scadenza;
i : tasso di interesse minimo garantito.
La (2) si può esprimere anche nel seguente modo: $G_T = N_0 \max\{I_T; K\}$
avendo indicato con: $K = I_0(1+i)^T$ ed $N_0 = \dfrac{D}{I_0}$.
Dato che :

$$\max\{x, y\} = x + \max\{y - x, 0\} = y + \max\{x - y, 0\}$$

si può adottare la "*scomposizione call*":

$$G_T = D(1+i)^T + N_0 \max\{I_T - K; 0\} \tag{3}$$

oppure la "*scomposizione put*", che ha la forma :

$$G_T = N_0 I_T + N_0 \max\{K - I_T; 0\} \tag{4}$$

Il valore a scadenza di una polizza Index, può essere replicato tramite un portafoglio costituito da una componente di tipo obbligazionaria e da una opzione, costituendo quello che prende il nome di "*Titolo strutturato*".

Sulla base di quanto osservato sul mercato assicurativo italiano, queste polizze possono essere classificate in 4 tipologie di contratti, in base alle garanzie offerte a scadenza:

a.: polizze che considerano la variazione totale dell'indice, il cui valore, alla scadenza, è individuato da:

$$G_T = D \max\left\{(1+i)^T; \eta\left(1 + \frac{I_T - I_0}{I_0}\right)\right\}$$

dove i: tasso di interesse garantito; T: la scadenza ; I_T : valore finale dell'indice, o del portafoglio di indici; I_0 : valore iniziale dell'indice;

b.: polizze che considerano la media degli incrementi mensili degli indici:

$$G_T = D \max\left\{(1+i)^T; \eta\left(1 + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{I_k - I_{k-1}}{I_{k-1}}\right)\right\}$$

In questi contratti, il rendimento offerto dall'indice è dato dalla media aritmetica delle osservazioni mensili dell'indice o del portafoglio di indici sottostante la polizza. Quando si parla di portafogli di indici, si considerano portafogli con uguali pesi degli indici stessi, ovvero:

$$P_t = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} I_t^{(h)}$$

avendo indicato con $I_t^{(h)}$ il valore al tempo t, del generico indice h, con $h = 1,..,$ n, con P_t il valore del portafoglio di indici, al tempo *t,* e con n il numero totale degli indici che fanno parte del portafoglio. In particolare, m è il numero delle osservazioni (di solito coincide con il numero dei mesi contenuti nella durata del contratto assicurativo).

c.: polizze che considerano la variazione tra il massimo valore ed il valore iniziale

$$G_T = D \max \left\{ (1+i)^T ; \eta \left(1 + \frac{I_{\max} - I_0}{I_0} \right) \right\}$$

dove I_{max} è il valore massimo che l'indice ha assunto durante tutta la vita del contratto e I_0 è il suo valore iniziale.

d.: polizze che considerano la garanzia cliquet:

$$G_T = D \max \left\{ (1+i)^T ; \eta \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \max \left(\frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}} ; 0 \right) \right) \right\}$$

Questa tipologia blocca i rendimenti positivi del portafoglio di indici durante la durata del contratto.

Osservando attentamente il valore della garanzia offerta a scadenza dalle varie polizze, si nota che il valore dell'indice sottostante non è "path independent"[2] , bensì dipende fortemente dal cammino percorso, nel senso che dipende dai valori assunti durante la vita del contratto. Per questo motivo le polizze sottostanti il titolo strutturato non si possono sempre valutare mediante i metodi standard (Black e Scholes), ma è necessario ricorrere a strumenti di calcolo alternativi (quali i metodi numerici).

2. I modelli attuariali

Diversi sono gli Autori che hanno affrontato lo studio delle forme assicurative agganciate a fondi azionari, con rendimento minimo garantito. Tali modelli si prestano agevolmente anche per la valutazione delle Index, considerando un indice o un paniere di indici in luogo del fondo azionario.

I primi studi che riguardano le forme assicurative oggetto di studio, si riferiscono a Brennan e Schwartz (1976). I due Autori valutano il premio unico puro di una polizza vita di tipo misto, assumendo deterministica la struttura a termine dei tassi di interesse. Attualmente questo modello è il più usato dalle compagnie di assicurazione. Secondo questo modello, il premio unico puro per una forma assicurativa di tipo misto è:

$$U = \sum_{t=1}^{T} \left[A e^{-rT} + N_0 C_0 (I_0, K, t, r) \right] \alpha_t \tag{5}$$

dove:

[2]Un titolo finanziario si dice *path independent* quando il suo valore non dipende dai valori assunti durante la sua vita finanziaria, ma solo dal suo valore finale e da quello iniziale.

$$\alpha_t = \begin{Bmatrix} {}_{T}p_x & \text{per } t = T \\ {}_{t-1/1}q_x & \text{per } \ t = 1, 2, ...T \end{Bmatrix}$$

$A = D\ (1{+}i)^T$: la garanzia alla scadenza del contratto;

${}_{t-1/1}q_x$ la probabilità dell'evento morte per un assicurato di età x alla stipula del contratto, tra il periodo *t-1* e t ;

${}_{T}p_x$ la probabilità di un individuo di età x di sopravvivere all'epoca T, ovvero all'età $x{+}T$;

$C_0(I_0, K, t, r)$: prezzo di una call sull'indice I, con prezzo di esercizio K e scadenza t.

Delbean (1990) usa un modello per la determinazione del prezzo di una polizza equity-linked, affrontando i principali teoremi legati al modello stesso. L'Autore propone un metodo generale per la valutazione del premio delle polizze in considerazione, sulla base dell'articolo di Harrison e Kreps (1979) .In particolare l'Autore propone il premio periodico ricorrendo a procedure numeriche.

Anche in Hipp (1996) si assume l'ipotesi di tassi di interesse deterministici; in particolare, viene proposto un modello di valutazione per le polizze Index-Linked per mezzo delle opzioni *forward cliquet option.*

E' da notare che l'Autore non tiene conto delle probabilità di sopravvivenza

dell'assicurato alla scadenza del contratto. Probabilmente l'autore tiene conto del fatto che se l'assicurato decede prima della scadenza, la garanzia va comunque elargita ai beneficiari, alla scadenza del contratto. Per questo motivo, però, una polizza Index - linked valutata con questo modello sarebbe considerata un prodotto puramente finanziario, non rientrando, dunque, nel ramo III della classificazione delle assicurazioni[3] . Analizzando attentamente tutto il lavoro, si nota che l'Autore considera il prezzo del "sovrapremio" dovuto per l'acquisto dell'opzione; sarebbe opportuno ricavare il premio di questa forma assicurativa, considerando le probabilità di sopravvivenza dell'assicurato, e quindi tenendo conto di irrinunciabili elementi demografici così come richiesto dalla normativa italiana.

Bacinello e Ortu , nel 1992, trovano una soluzione in forma chiusa per la determinazione del premio unico puro per le forme assicurative "*equity-linked*"[4] , quando la struttura a termine dei tassi di interesse segue il processo di Vasicek (1977) , individuato da:

$$dr(t) = k\left[\theta - r(t)\right]dt + \sigma_r dw_2$$

dove: k: costante di richiamo;

θ: tasso di interesse di lungo periodo;

σ_r : volatilità dello spot rate.

ed il valore del fondo di riferimento evolve secondo un processo di tipo log-normale.

In questo contesto, quindi, il premio unico puro per una forma assicurativa di tipo misto è dato da:

$$U = D\sum_{h=1}^{T}\alpha_h N(d_{1,h}) + \sum_{h=1}^{T}\alpha_h g_h v(r(h), 0, t)\left[1 - N(d_{2,h})\right] \tag{6}$$

[3]Cfr. D. Lgs. 174/95

[4]Una polizza Equity linked è una polizza con prestazioni agganciate all'andamento di un fondo azionario con prestazione minima garantita.

dove:

$$\alpha_t = \begin{Bmatrix} {}_{T}p_x & \text{per } t = T \\ {}_{t-1/1}q_x & \text{per } \ t = 1, 2, ...T \end{Bmatrix}$$

$$v(r(h), 0, t) = \exp\left\{-\frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right) r(t) + H(T-t)\right\}$$

$$H(\tau) = -\tau\left(\theta + \frac{\sigma_r \bar{q}}{k}\right) + \frac{1}{k}\left(\theta + \frac{\sigma_r \bar{q}}{k}\right)\left(1 - e^{-k\tau}\right) + \frac{1}{4}\frac{\sigma_r}{k^3}(4e^{-k\tau} - e^{-2k\tau} + 2k\tau - 3)$$

$$d_{1,t} = \frac{\ln\left(\frac{I_0}{g_t}\right)}{\sqrt{d_{3,t}}} + \frac{1}{2}\sqrt{d_{3,t}}$$

$$d_{2,t} = d_{1,t} - \sqrt{d_{3,t}}$$

$$d_{3,t} = \int\limits_0^T \varphi^2(s)ds$$

$$\varphi^2(t) = \sigma_S^2 - 2\rho\sigma_S\frac{\sigma_r}{k}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right) + \frac{\sigma_r^2}{k^2}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right)^2$$

In particolare, la (6) coincide con la formula di Brennan-Schwartz quando la struttura dei tassi è deterministica.

3. Il modello con tassi di interesse e volatilità stocastici.

Si considera qui un approccio per trovare il premio unico puro di una polizza Index Linked che considera la volatilità del paniere degli indici di riferimento stocastica e la struttura a termine dei tassi di interesse variabile, in accordo al modello di Vasicek.

Si supponga, quindi, che l'evoluzione del paniere sia individuata dall'equazione differenziale stocastica:

$$dP = P\mu dt + P\sigma dw_1$$

la dinamica della volatilità del paniere sia anch'essa stocastica:

$$d\sigma = \sigma\eta dt + \sigma\xi dw_2$$

ed, infine, la dinamica dei tassi di interesse sia:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma_r dw_3$$

dove:
μ: drift del processo del paniere;
η: drift del processo volatilità;
ξ: deviazione standard della volatilità;
dw_1, dw_2, dw_3: processi di Wiener, che si suppongono indipendenti.

Il prezzo del titolo strutturato, a copertura delle riserve che si devono avere in una forma assicurativa Index Linked, incorpora il prezzo di un'opzione *call* (se si usa la scomposizione *call*); di conseguenza, in questo caso, il prezzo dell'opzione, o più in generale di un derivato, è funzione delle quattro variabili P, σ, r e t e la sua dinamica, dC, è descritta dalla seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial P}dP + \frac{\partial C}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{\partial C}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial P^2}\sigma^2 P^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}\sigma^2 \xi^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\sigma_r^2 dt$$

avendo supposto i tre processi di Wiener indipendenti[5] .

Si supponga, ora, che nel mercato dei capitali siano presenti due beni di prezzi P_1 e P_2, le cui evoluzioni siano individuate dalle seguenti equazioni:

$$dP_1 = \mu_1 P_1 dt + \sigma_1 P_1 dw_2$$
$$dP_2 = \mu_2 P_2 dt + \sigma_2 P_2 dw_3$$

i cui termini di disturbo dw_2 e dw_3 sono proprio gli stessi termini del processo della volatilità e dello spot rate.

Si vuole costruire un portafoglio istantaneamente non rischioso nel seguente modo:

- posizione lunga su una unità del paniere P;
- posizione corta (vendita allo scoperto) su $\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}$ unità dell'opzione *call*;
- posizione lunga su $\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\frac{\partial C}{\partial \sigma}\xi\frac{\sigma}{\sigma_1 P_1}$ unità del bene P_1, dove P_1 indica il prezzo corrente del bene P_1, osservato sul mercato;
- posizione lunga su m unità sul secondo bene P_2.

Il valore in t = 0 di questo portafoglio è dato da:

$$V = P - \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1} C + \left\{\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right)\xi\frac{\sigma}{\sigma_1 P_1}\right\} P_1 + mP_2$$

e la sua dinamica è individuata dalla:

$$dV = dP - \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1} dC + \left\{\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right)\xi\frac{\sigma}{\sigma_1 P_1}\right\} dP_1 + m dP_2$$

Sostituendo le espressioni di dP, dC, dP_1 e dP_2 si ottiene:

$$dV = \left\{\begin{array}{c} -\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\sigma\eta + \frac{\partial C}{\partial r}k(\theta - r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial P^2}\sigma^2 P^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}\sigma^2\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\sigma_r^2 + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\xi\frac{\sigma}{\sigma_1}\mu_1\right) + m\mu_2 P_2 \end{array}\right\} dt + \\ + \left\{\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\frac{\partial C}{\partial r}\sigma_r + m\sigma_2 P_2\right\} dw_3$$

Affinché il termine aleatorio presente nell'espressione precedente sia nullo, deve essere:

$$m = -\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\frac{\partial C}{\partial r}\frac{\sigma_r}{\sigma_2 P_2}$$

[5]Supporre i tre disturbi aleatori tra loro indipendenti significa che i tre termini che comprendono le derivate miste sono nulli perchè sono nulli i coefficienti di correlazione.

per cui il valore, in t = 0, del portafoglio è dato:

$$V = P - \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}\left\{C - \frac{\partial C}{\partial \sigma}\xi\frac{\sigma}{\sigma_1} - \frac{\partial C}{\partial r}\frac{\sigma_r}{\sigma_2}\right\}$$

Dalla condizione di assenza di arbitraggio: dV = Vrdt, si ottiene la seguente espressione:

$$-\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)^{-1}[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \sigma}(\sigma\eta - \xi\frac{\sigma}{\sigma_1} + \mu_1\xi\frac{\sigma}{\sigma_1}) + \frac{\partial C}{\partial r}k(\theta - r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial P^2}\sigma^2 P^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}\sigma^2\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\sigma_r^2 + \frac{\partial C}{\partial r}\frac{\sigma_r}{\sigma_2}\mu_2 + Cr - \frac{\partial C}{\partial r}\frac{\sigma_r}{\sigma_2}] - Pr = 0$$

Il calcolo numerico consente di determinare in modo agevole il prezzo di un titolo derivato dipendente da più fonti di incertezza presenti sul mercato finanziario e quindi di determinare il prezzo delle forme assicurative in esame.

I metodi analitici per la risoluzione delle opzioni finanziarie possono essere usati solo quando il bene sottostante non è "*path dependent*". Nelle polizze in esame il bene sottostante dipende dai valori che ha assunto durante la vita del contratto, per cui risulta path dependent. In questi casi, non esiste una soluzione analitica per determinare il valore di una call option su quel bene. E' per questo motivo che i metodi numerici hanno un ruolo sempre più importante. Una tecnica dell'analisi numerica che recentemente ha trovato larga applicazione nel mondo della finanza è il metodo numerico Monte Carlo[6] . I metodi Monte Carlo sono usati soprattutto quando si presenta un problema di difficile risoluzione analitica; il loro grande uso è dovuto alla flessibilità dei metodi per strumenti finanziari complessi (in molte opzioni esotiche il prezzo del bene sottostante è *path - dipendent*).

4. L'approccio numerico.

Per determinare il prezzo di una Index si è utilizzato il metodo Monte Carlo con due ipotesi diverse: in una prima ipotesi si considera la volatilità dell'indice costante e la struttura dei tassi variabile, mentre nella seconda ipotesi si considera variabile sia la struttura dei tassi sia la volatilità dell'indice (o paniere di indici) preso a riferimento.

Nel metodo numerico con volatilità costante si ipotizza una struttura a termine dei tassi di interesse la cui dinamica è individuata dalla formula di Vasicek:

$$dr = k(\theta - r(t))dt + \sigma_r dw_2$$

In quest'ottica, quindi si discretizza il processo, e la simulazione opera secondo i seguenti passi:

1.: legge come input i valori: I_0, g_t, t, Δt, σ, σ_r, k, q, r, r(0), ρ, N (numero di simulazioni);

2.: incrementa i valori dell'indice e dello spot rate secondo le :

[6]Tale metodo, in finanza, è stato introdotto da Boyle nel 1977, con il lavoro: "*Option: a Monte Carlo Approach*" in Journal of Financial Economics, 4, pp. 323-338

$$I(t+\Delta t) = I(t)\exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon_1\sqrt{\Delta t}\right\}$$
$$r(t+\Delta t) = r(t)\exp\left\{\left(k(\theta - r(t)) - \frac{\sigma_r^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_r dw_2\right\}$$

dove:$dw_2 = \rho dw_1 + \varepsilon_2\sqrt{(1-\rho^2)\Delta t}$, con ρ coefficiente di correlazione tra dw_1 e dw_2, ε_1 ed ε_2 variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite secondo la normale standard;

3.: si incrementa il tempo di passo Δt, fino alla scadenza T , di anno in anno;

4.: si ripete la procedura per N volte;
5.: si calcola la call il cui indice sottostante è I_0 e con prezzo di esercizio pari alla garanzia in t
6.: si simula numericamente la struttura a termine dei tassi di interesse;
7.: si calcola il premio unico secondo la: $U = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \left(g_t e^{-r(t)t} + call_0(t)\right)$

dove $\alpha_t = \begin{Bmatrix} {}_Tp_x & \text{per } t = T \\ {}_{t-1/1}q_x & \text{per } \ t = 1, 2, ...T \end{Bmatrix}$

$\mathrm{call}_0(\mathrm{t})$ indica il valore in t = 0 dell'opzione *call* che scade in t.
Al fine di evitare instabilità al metodo simulativo, per ridurre l'errore, soprattutto quando T >6 anni, si è utilizzato il metodo delle variabili antitetiche[7] e si sono simulati due prezzi di opzioni, quindi, se ne è fatta la media aritmetica.
Anche nel metodo numerico con volatilità stocastica, si ipotizza una struttura a termine dei tassi di interesse variabile, in accordo a quanto fatto per i modelli precedenti, ovvero si ipotizza che il processo dell'indice sia individuato da:

$$dP = P\mu dt + P\sigma dw_1$$

mentre il processo della volatilità ed il processo dello spot rate sono individuati rispettivamente dalle:

$$d\sigma = \sigma\eta dt + \sigma\xi dw_2$$
$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma_r dw_3$$

In questo caso si hanno tre disturbi aleatori, individuati dai tre processi di Wiener w_1, w_2, w_3. Si è ipotizzato che il disturbo del processo dello spot rate, w_3, sia indipendente dagli altri due, mentre i disturbi dell'indice e della volatilità sono correlati per mezzo del coefficiente di correlazione ρ'. In questo tipo di simulazione, l'opzione sottostante il titolo strutturato viene calcolata simulando il processo dello spot rate, della volatilità e dell'indice sottostante, assumendo come valore iniziale dell'indice I_0.

[7]E' un metodo per ridurre l'errore dell'approssimazione numerica Monte Carlo, quindi per migliorare la precisione del metodo. Per maggiori dettagli si veda Boyle et al. (1997).

5. L'applicazione.

In questa sezione si propone un esperimento numerico applicato ad un'assicurazione Index per un individuo di età x = 40 anni e scadenza T = 10 anni. Le tavole di mortalità si riferiscono alla tavola S.I.M. 1990 - 92 Maschi, tratte da fonte ISTAT.

Come si è visto in precedenza, il premio unico di una polizza Index Linked può essere espresso come combinazione lineare, con pesi , t = 1,..., T, di un valore di mercato, calcolato al tempo t = 0, del beneficio b_t, ovvero:

$$U = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \left(g_t e^{-r(t)t} + N_0 C_0(t) \right)$$

dove: $\alpha_t = \begin{Bmatrix} {}_Tp_x & \text{per } t = T \\ {}_{t-1/1}q_x & \text{per } \; t = 1, 2, ...T \end{Bmatrix}$

$g_t = D(1+i)^t$, t = 1,..., T,

D è il capitale inizialmente investito da parte dell'assicurato, al netto delle spese e dei caricamenti;

$N_0 = \dfrac{D}{I_0}$

I_0 è il valore dell'indice osservato alla data di stipula del contratto;

C_0 è il valore della *call option* osservata in t = 0, e scadenza t;

K = $I_0(1+i)^t$ è il prezzo di esercizio della *call* ed i è il tasso di interesse garantito.

Quanto osservato è stato sperimentato in un caso corrente, considerando una polizza con le seguenti caratteristiche:

1. il paniere è individuato dai seguenti indici:
   - I_1: indice Nikkei 225
   - I_2: indice S&P
   - I_3: indice Mib 30
   - I_4: indice SMI;
2. la forma assicurativa è di tipo misto;
3. la prestazione, alla scadenza, è data dal capitale investito, D = 2582 ∈ (£ 5.000.000), rivalutato con il massimo rendimento offerto tra il paniere degli indici ed il tasso minimo garantito, assunto pari a 0, quindi si garantisce la restituzione del capitale iniziale.
4. La durata della polizza è di 10 anni.

Il valore del paniere, in t = 0, è pertanto dato da:

$$P_0 = \frac{1}{4} \left(I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + I_0^{(3)} + I_0^{(4)} \right)$$

avendo considerato un portafoglio con pesi degli indici uguali tra loro ed avendo indicato con il valore al tempo t = 0 dell'i-esimo numero indice[8].

[8] I diversi indici considerati sono misurati in moneta locale (i dati sono stati ricavati da *datastream*), quindi, per evitare il rischio di cambio, si sono utilizzati i *numeri indici su base fissa*, ovvero ciascun numero corrispondente ad una certa data t è individuato da $i_t = \frac{I_t}{I_0}$, avendo assunto per I_0 il valore dell'indice alla data 1/1/1998.

Per il calcolo del premio unico è necessario conoscere i valori di alcuni parametri, tra cui il parametro della varianza del portafoglio, dato dalla seguente:

$$\sigma_P^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{4} x_i x_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \sigma_i^2 \quad \text{per} \quad i \neq j$$

dove σ_i^2 per i= 1,...,4, è la varianza dell'i-esimo indice, mentre σ_{ij} è la covarianza tra l'indice i e l'indice j, ed x_i è il peso di ciascun indice, ovvero, nel caso in esame, x_i = 0,25, per i = 1,...,4.

Per la stima della varianza dei rendimenti logaritmici del portafoglio, si sono osservati i prezzi giornalieri degli indici sopra elencati per un periodo che va dal 1/1/1998 al 20/12/1999. Con queste osservazioni si sono stimate le volatilità e le covarianze dei logaritmi dei rendimenti degli indici, ottenendo una volatilità di portafoglio pari a = 0,25, su base annua. Il valore iniziale del portafoglio è di 1, avendo assunto come tempo iniziale della polizza, la data 20/12/99, ovvero l'ultimo giorno di osservazione dei prezzi degli indici.

Come tasso di interesse iniziale si è assunto r(0) = 2,5%, come tasso di interesse garantito si è assunto r = 0, ovvero si garantisce la restituzione del capitale inizialmente investito, ovvero D = 2.582,5 € (£ 5.000.000).

I valori degli altri parametri necessari per la determinazione del premio unico sono assunti[9] :
$\theta = 6\%$
k = 0,1
σ_r = 0,05
q = 0,2
$\rho = 0$

Per quanto riguarda i valori dei parametri η e ξ, del processo della volatilità stocastica, bisognerebbe costruire le serie storiche delle volatilità implicite stimate dall'osservazione delle opzioni su quel portafoglio. Il problema principale è che non esistono opzioni su quel particolare portafoglio, per cui si è osservato quale dei quattro indici considerati ha una volatilità storica, sulla stessa base dei dati osservati, più prossima alla volatilità del portafoglio, quindi si è costruita le serie storica delle volatilità implicite ricavate dall'osservazione delle opzioni "at-the money"[10] per mezzo della formula di Black e Scholes. Con questi parametri, quindi, si è calcolato il premio unico per mezzo della formula di Bacinello-Ortu, di Brennan-Schwartz, della simulazione con volatilità costante e della simulazione con volatilità stocastica.

I risultati sono i seguenti:

U(B-O) = 2722€ Premio Unico Puro calcolato con Bacinello-Ortu;
U(B-S) = 2728 € Premio Unico Puro calcolato con Brennan-Schwartz;
U(Sim) = 2550 € Premio Unico Puro calcolato con il metodo simulativo con volatilità costante;

[9]Ricerche future si potrebbero orientare sulla determinazione dei parametri in questione, tramite l'osservazione dei dati sul mercato, analogamente a quanto si fa per la determinazione dei parametri del modello C.I.R.

[10]Per maggiori dettagli si rimanda a Baldini M. (b) (1999).

U(Sim Vol) = 2590€ Premio Unico Puro calcolato con il metodo simulativo con volatilità stocastica.

I tempi computazionali sono i seguenti: 5' per il calcolo del premio con Bacinello-Ortu, 3' per il calcolo del premio di Brnnan-Schwartz, circa 2' per i premi simulati; è da notare che le simulazioni sono state effettuate tramite un computer Pentium 100, per cui se si avesse a disposizione un computer più potente i tempi di elaborazione si ridurrebbero notevolmente.

Oltre alla determinazione dei premi unici, si è analizzato il comportamento della riserva nel tempo, assumendo gli stessi dati iniziali[11] . In Tabella 1 sono riportati i valori della riserva determinati con i diversi metodi, in particolare nella prima colonna vengono riportati i tempi, misurati in anni, nella seconda colonna vengono riportati i valori della riserva matematica calcolati con la formula di Bacinello-Ortu, nella terza colonna compaiono le riserve calcolate con la formula di Brennan-Schwartz e nelle ultime due colonne sono riportate le riserve matematiche calcolate con i metodi simulativi, in particolare con *Sim* si è indicato il metodo simulativo che adotta la volatilità costante e con *Sim Vol* si è indicato il metodo che adotta la volatilità stocastica. Dall'osservazione della Tabella 1 si nota che il titolo strutturato ha un valore inferiore se si utilizza il metodo della simulazione.

Tabella 1.

Tempi	**Bacinello**	**Brennan**	**Sim**	**Sim Vol**
0	2722	2728	2550	2590
1	2724	2740	2598	2575
2	2726	2749	2570	2562
3	2727	2754	2560	2560
4	2727	2755	2565	2541
5	2725	2751	2563	2532
6	2720	2741	2533	2526
7	2708	2722	2512	2506
8	2684	2690	2501	2492
9	2635	2636	2482	2479
10	2582	2582	2582	2582

I dati della Tabella 1 sono riportati nel grafico di Figura 1.

[11]Normalmente, quando si calcola la riserva durante la vita di una forma assicurativa, si osservano i dati sul mercato, ed in genere, non sono gli stessi valori dei dati iniziali.

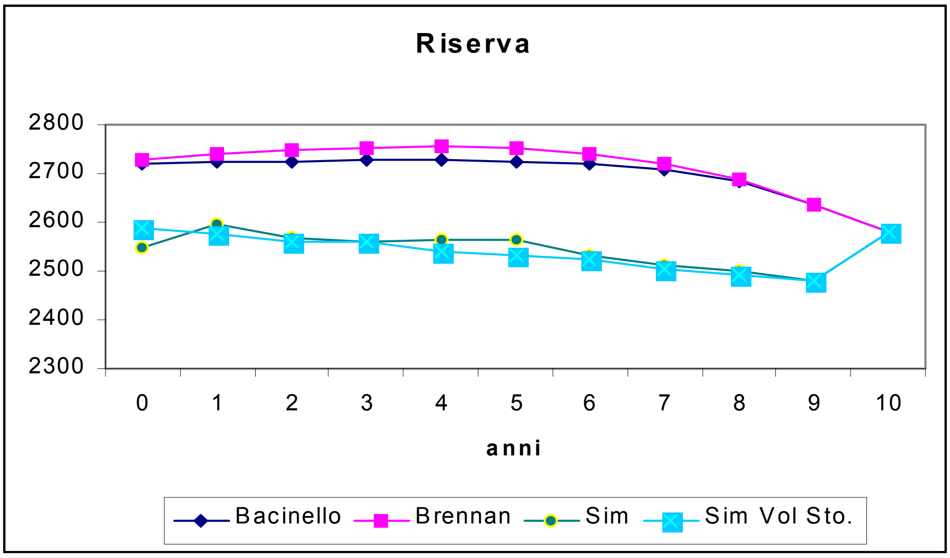

FIGURE 1. *Andamento della riserva nel tempo*

6. Conclusioni

In questo lavoro si sono messi a confronto i modelli di valutazione delle polizze Index Linked per valutare il prezzo per acquistare il titolo strutturato a copertura della riserva matematica di tali polizze. I modelli analitici presenti in Letteratura si sono confrontati con i modelli simulativi che considerano la volatilità dell'indice sottostante costante nel tempo o la volatilità variabile secondo un processo stocastico. Si è notato che i metodi simulativi tendono a restituire un premio di valore inferiore rispetto al premio calcolato con le formule analitiche. Ad ogni modo l'errore percentuale tra il metodo numerico ed il metodo analitico, a parità di condizioni iniziali, è del 4% su un arco temporale di 10 anni; tale errore è dovuto al fatto che per il metodo Monte Carlo si ricorre alla somma di tante opzioni "call" e, quindi, vengono sommati gli errori sistematici delle opzioni [12]. Si tenga presente, inoltre, che tale errore (4 %) risulta essere relativamente basso considerando il periodo del contratto (10 anni). Tale errore si potrebbe ridurre ulteriormente ricorrendo ai metodi Quasi Monte Carlo.

I metodi analitici hanno il pregio di offrire una formula per la determinazione del premio, ma per far questo, spesso è necessario ricorrere ad ipotesi semplificatrici; tra le ipotesi semplificatrici gioca un ruolo rilevante l' ipotesi della volatilità dell'indice/paniere di indici preso a riferimento. Le polizze in esame sono contratti a medio-lungo termine scritte su titoli finanziari i cui prezzi evolvono in modo aleatorio nel tempo; ipotizzare, quindi, la volatilità costante per tutta la durata è alquanto limitativo; è più realistico considerare un processo stocastico della volatilità dell'indice

[12] Si consideri che il metodo Monte Carlo con le variabili antitetiche ha un errore dello 0,1% rispetto alla formula di Black e Scholes, per un'opzione con scadenza 1 mese.

preso a riferimento, cosa che non è stata fatta per i modelli analitici. Per valutare le polizze in esame considerando una struttura a termine dei tassi di interesse ed una volatilità dell'indice sottostante stocastici, è necessario ricorrere a metodi numerici.

Osservando il grafico di figura 1, si nota che con l'utilizzo di metodi simulativi la riserva matematica rimane sempre al di sotto dei valori ottenuti con metodi analitici; ciò significa che viene richiesto al contraente un premio inferiore quando si calcola il prezzo di una Index tramite simulazione rispetto a quanto si chiederebbe se si calcola il prezzo adottando i metodi analitici. La riserva matematica è una valutazione dinamica dell'assicurazione; detta valutazione considera il valore attuale medio delle prestazioni future dell'assicuratore nei confronti del contraente. Per questo motivo, ai fini della determinazione dei premi e delle riserve matematiche delle Index, sono preferibili i metodi numerici ai metodi analitici sia perché il premio risulta inferiore, sia perché si possono adattare alle prestazioni a scadenza offerte dalla compagnia[13] e sia perché considerano stocastiche le volatilità del sottostante e la struttura a termine dei tassi di interesse, ipotesi, queste ultime, più realistiche.

In Italia questo tipo di polizze sono solo a premio unico ed è per questo motivo che in questo lavoro si è considerata solo la determinazione del premio unico. Ricerche future si potrebbero orientare sulla determinazione del premio annuo ricorrente ed orientare, così, le compagnie italiane ad immettere sul mercato questo tipo di polizze, di maggiore comodità per i risparmiatori.

References

[1] Bacinello A. R., Ortu F. (1992) "Single and Periodic Premiums for Guaranteed equity-linked Life Insurance under Interest rate risk: the Lognormal + Vasicek Case." *Proceedings of the EURO Working Group on Financial Modelling Meetings.*

[2] Baldini M. (a) (1999) "Simulazione Stocastica: un'Applicazione al Mercato finanziario italiano." *Quaderni del Dipartimento di Matematica per le decisioni economiche, finanziarie ed assicurative*, Università di Roma "La Sapienza", n.2, Anno VI.

[3] Baldini M. (b) (1999) "Volatilità stocastica: un'applicazione del metodo Monte Carlo". *Nuovi Indirizzi scientifici e didattici nella teoria del rischio*, Campobasso 1999.

[4] Boyle P.P. (1977) "Options: a Monte Carlo Approach" , *Journal of Financial Economics*, 4, pp. 323-338.

[5] Boyle P., Broadie M., Glasserman P. (1997) "Monte Carlo methods for security pricing" , *Journal of Economic Dynamics & control*, pp.1-55

[6] Brennan M.J., Schwartz E. S. (1976) "The Pricing of Equity Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guaranteed", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 195-213.

[7] Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (1997) Corso su "La gestione finanziaria dei fondi pensione", *A. A. S. N. S. Pisa.*

[8] Delbean F. (1990) "Equity Linked Policies" , *Bulletin Association Royal Actuaries* Belges, pp. 33-52.

[9] Harrison M. J., Kreps D. (1979) - "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408

[10] Harrison M. J., Kreps D. (1979) "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408

[11] Hipp C.(1996) "Option for Guaranteed Index-Linked Insurance", *A.F.I.R.*

[12] Pitacco E. (2000) "Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita". Lint, Trieste.

[13] Si pensi ai diversi *payoff* esaminati nella prima parte del lavoro.

[13] Vasicek O. A. (1997) "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp.177-188.

Università di Ancona, Facoltà di Economia, Istituto DE.F.In.
E-mail address: Baldini@posta.econ.unian.it